ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δίνεται η εξίσωση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 3 = 0$

i) ΝΔΟ αυτή έχει μία μοναδική απλή ρίζα $x^* \in I = [0,1]$ για την εύρεση της να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος

$$x_{n+1} = \frac{1}{6}(-2x_n^3 + 3x_n^2 + 3), \quad n = 0,1,2,\dots$$

ii) ΝΔΟ συγκλίνει στο $I = [0,1]$ $\forall x_0 \in I$

ΛΥΣΗ

i) $f(0) = -3 < 0$, $f(1) = 2 > 0$ $\Rightarrow$ $sgn(f(0)) \neq sgn(f(1))$ τότε θα $\exists$ ρίζα $x^* \in [0,1] : f(x) = 0$

$f'(x) = 6x^2 - 6x + 6 = 6(x^2 - x + 1) > 0$, $\forall x \in [0,1]$

Άρα, $\exists x^* \in [0,1]$ μοναδικό $: f(x) = 0$

ii) Έστω $\varphi(x) = \frac{1}{6}(-2x^3 + 3x^2 + 3)$

$x = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}(-2x^3 + 3x^2 + 3) \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Επομένως, θα συγκλίνει στην ρίζα x^* της $f(x) = 0$

$\varphi'(x) = \frac{-6x^2 + 6x}{6} = x - x^2 = x(1-x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$

άρα $\varphi'(x) > 0 \quad \forall x \in (0,1) \Rightarrow \varphi \uparrow$ στο $[0,1]$

(όπου το 0 και 1 ρίζες της φ')

$\varphi([0,1]) = [\varphi(0), \varphi(1)] = [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \subseteq [0,1]$ καλά ορισμένη

$L = \max_{x \in [0,1]} |\varphi'(x)| = \max_{x \in [0,1]} |x - x^2| = \varphi'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} < 1$ συστολή

Άρα, θα συγκλίνει στο $I = [0,1]$ $\forall x_0 \in I$

2) Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ με τη μέθοδο LU παραγοντοποίησης

ΛΥΣΗ

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Άρα, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ και $U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$Ax = I \Leftrightarrow LUx = I \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = I & (1^{η}) \\ Ux = y & (2^{η}) \end{cases}$$

Απο την $1^{η}$ εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{11} = 1, \quad y_{12} = 0, \quad y_{13} = 0 \\ -y_{11} + y_{21} = 0 \Rightarrow y_{21} = 1, \quad -y_{12} + y_{22} = 1 \Rightarrow y_{22} = 1 \\ \text{και} \quad -y_{13} + y_{23} = 0 \Rightarrow y_{23} = 0 \\ y_{11} - y_{21} + y_{31} = 0 \Rightarrow 1 - 1 + y_{31} \Rightarrow y_{31} = 0 \\ y_{12} - y_{22} + y_{32} = 0 \Rightarrow 0 - 1 + y_{32} \Rightarrow y_{32} = 1 \\ y_{13} - y_{23} + y_{33} = 0 \Rightarrow 0 - 0 + y_{33} = 0 \Rightarrow y_{33} = 0 \end{cases}$$

Αρα, $y^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Απο την $2^{η}$ εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

όμοια, βρίσκουμε:

$$\left.\begin{matrix} x_{11} = 0, & x_{21} = 1, & x_{31} = 0 \\ x_{12} = -\frac{1}{4}, & x_{22} = \frac{1}{2}, & x_{32} = \frac{1}{2} \\ x_{13} = -\frac{1}{2}, & x_{23} = -\frac{1}{2}, & x_{33} = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \quad x^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

ή μέσω Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \text{όμοια}, \quad x^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

3) Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $Ax=b$ όπου

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss με μερική οδήγηση. Να βρεθεί συγχρόνως και η ορίζουσα του A.

ΛΥΣΗ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επιλέγουμε το max στοιχείο της $1^{ης}$ στήλης και έτσι έχουμε ως οδηγό γραμμή την $i=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ και κάνουμε την ίδια διαδικασία του Gauss με φυσική οδήγηση.

Άρα, προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 3/2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Για την ορίζουσα του A βρίσκουμε την ορίζουσα:

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \det A =$$

$$= (-1)^2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} = -2$$

Επειδή έχουμε εναλλάξει 2 γραμμές νωρίτερα

Εναλλάσσουμε και παίρνουμε:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

Έτσι, $x_3 = 1$, $-\frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = -1 \Rightarrow x_2 = 1$

και $2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \Rightarrow 2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$

$x^T = (1,1,1)^T$.

4) Έστω το γραμμικό σύστημα $Ax=b$, όπου

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$ και $$b=\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}$$. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση μεταξύ των μεθόδων Jacobi, Gauss-Seidel. Να γίνουν 2 επαναλήψεις της Μεθόδου Gauss-Seidel

ΛΥΣΗ

- $$G_J = D^{-1}\cdot(L+U) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}$$

$$\det(G_J-\lambda I) = \begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & -\lambda & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{3} & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^3+\lambda\cdot\frac{1}{2}+\lambda\cdot\frac{1}{6} = -\lambda\left(\lambda^2-\frac{2}{3}\right)=0$$

$\lambda_1=0$ ή $\lambda_2=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ή $\lambda_3=-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

όπου,

$\rho(G_J)=\sqrt{\frac{2}{3}}<1 \longrightarrow$ Άρα, συγκλίνει.

- $$G_{G-S}=(D-L)^{-1}\cdot U = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0\\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$\det(G_{GS}-\lambda I) = \begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda/2 & -1/2\\ 0 & -1/6 & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^2\cdot\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)=0$$

$\lambda_1=\lambda_2=0$ και $\lambda_3=\frac{2}{3}$

όπου,

$\rho(G_{GS})=\frac{2}{3}<1 \longrightarrow$ Άρα, συγκλίνει

Παρατηρείται ότι:

$\rho(G_{GS})<\rho(G_J)$ και συγκεκριμένα $\rho(G_{GS})=[\rho(G_J)]^2$

Η G-S έχει διπλάσια ταχύτητα από την Jacobi για τις επαναλήψεις, ξέρουμε ότι

Gauss-Seidel:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \right]$$

$x_1^{(k+1)} = x_2^{(k)}$

$x_2^{(k+1)} = (2 + x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}) \cdot \frac{1}{2}$

$x_3^{(k+1)} = (4 - x_2^{(k+1)}) \cdot \frac{1}{3}$

Δίνεται $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Άρα,

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ (2+0-0)\frac{1}{2} \\ (4-1)\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ← 1η επανάληψη

και

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ (2+1-1)/2 \\ (4-1)/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ← 2η επανάληψη

5) Να βρεθεί η συνάρτηση f, αν είναι γνωστό ότι είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα, και δίνεται από τον πίνακα τιμών:

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	3	1	3

κανόνας χρήση μόνο παρεμβολής

ΛΥΣΗ

Απο τις διαιρεμένες διαφορές του Newton έχουμε ότι:

x_i	$\Delta^{(0)}(x_i)(f)$	$\Delta^{(1)}(x_i, x_{i+1})(f)$	$\Delta^{(2)}(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})(f)$
-1	3		
		-2	
0	1		1
		1	
2	3		

$$P_2(x) = f(x_0) + (x-x_0)\Delta^{(1)}(x_0,x_1)(f) + (x-x_0)(x-x_1)\cdot\Delta^{(2)}(x_0,x_1,x_2)(f) =$$
$$= 3 + (x+1)\cdot(-2) + (x+1)x\cdot 1 = x^2 - x + 1$$

Γνωστό ότι: $f(x) = P_2(x) + R_3(x)$

όπου $R_3(x) = (x-x_0)\cdot(x-x_1)(x-x_2)\dfrac{f'''(\xi)}{3!} = x\cdot(x-1)(x-2)\dfrac{(\xi^3)'''}{3!} =$

$= x(x-1)(x-2) = x^3 - x^2 - 2x$

Άρα, $f(x) = x^3 - x + 1 + x^3 - x^2 - 2x = x^3 - 3x + 1$

6) Έστω ο πίνακας

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	0	-2	-4	0

Να βρεθούν οι ακριβείς τιμές των ολοκληρωμάτων: $\int_0^1 P(x)dx$; $\int_1^2 P(x)dx$ και $\int_2^3 P(x)dx$ (με P=πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία x_i) χωρίς να βρεθεί το $P(x)$.

Λύση

Αφού έχουμε 4 σημεία το πολυώνυμο είναι το πολύ 3ου βαθμού. Επομένως, κάνουμε χρήση Simpson και $\frac{3}{8}$.

• $\int_0^1 P(x)\,dx = \int_0^3 P(x)\,dx - \int_1^3 P(x)\,dx =$

$= \frac{3h}{8}\left(f(0) + 3f(1) + 3f(2) + f(3)\right) - \frac{h}{3}\left(f(1) + 4f(2) + f(3)\right) =$

$\overset{h=1}{=} \frac{3}{8}\left(0 + 3(-2) + 3(-1) + 0\right) + \frac{1}{3}(-2 + 4(-4) + 0) = -\frac{27}{4} + 6 = -\frac{3}{4}$.

• $\int_2^3 P(x)dx = \int_0^3 P(x)dx - \int_0^2 P(x)\,dx = -\frac{27}{4} - \frac{1}{3}(0 + 4(-2) - 4) =$

$= -\frac{27}{4} + 4 = \frac{11}{4}$.

• $\int_1^2 P(x)dx = \int_0^2 P(x)dx - \int_0^1 P(x)dx = -4 + \frac{3}{4} = -\frac{13}{4}$

7) Δοθέντος P που δίνεται από τον πίνακα τιμών

x_i	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x_i)$	-25	0	3	3	0	5

και $P \in \mathbb{P}_3$.

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:
$\int_{-3}^{3} f(x)dx$, $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ κάνοντας χρήση των κατάλληλων τύπων αριθμητικής ολοκλήρωσης δίχως να βρεθεί η f

ΛΥΣΗ

• $\int_{-3}^{3} f(x)dx$: Με βήμα $h=2$ και χρήση $\frac{3}{8}$ έχουμε:

$$\int_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{3h}{8}\left(f(-3)+3f(-1)+3f(1)+f(3)\right) =$$

$$= \frac{6}{8}\left(-25+3\cdot 3+3\cdot 3+5\right) = 12$$

• $\int_{-1}^{1} f(x)dx$: Με βήμα $h=1$ και χρήση Simpson έχουμε:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-3}^{3} f(x)dx - \int_{-3}^{-1} f(x)dx - \int_{1}^{3} f(x)dx =$$

$$= 12 - \frac{1}{3}(-25+4\cdot 0+9) - \frac{1}{3}(3+4\cdot 0+5) = \frac{44}{3}$$